INVARIÁNS VALÓSZINÜSÉGI NYOMOPERÁCIÓKRÓL

Szűcs József
III. évf. matematikus

Bevezetés[x]

J. R. Blum és D. L. Hanson /1/ dolgozatukban bebizonyitják a következő mértékelméleti tételt: Ha Ω tetszőleges halmaz, $\mathcal{A}$ az Ω fölött definiált σ-algebra, T Ω-nak valamely mérhető invertálható[xx] transzformációja, μ és ν pedig $\mathcal{A}$-n definiált, T-re nézve invariáns, $\mathcal{A}$ T-re vonatkozóan fix elemein megegyező valószinűségi mértékek, akkor $\mu \equiv \nu$. Ennek a tételnek a felhasználásával kimutatják, hogy az $\mathcal{A}$-n definiált T-invariáns valószinűségi mértékek konvex halmazának extremális pontjai éppen a T-ergodikus mértékek. Utóbbi eredményünktől inditva, a T-invariáns valószinűségi mértékek ergodikus mértékek szerinti direkt integrálfelbontását is elvégzik, legalább is abban az esetben, amikor Ω, $\mathcal{A}$ és T olyan, hogy ha valamely invariáns $\mathcal{A}$-beli halmazon minden ergodikus mérték eltünik, akkor minden invariáns valószinűségi mérték is eltünik ezen a halmazon. Ez a feltétel azonban természetes, mivel az integrálfelbontás létezése maga után vonja ennek a teljesülését.

Jelen dolgozatban Blum és Hansen tételeinek analogonjait bizonyitjuk be abban az esetben, amikor az $\mathcal{A}$ szerepét egy $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ /véges/ Neumann-algebra, T-ét $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ automorfizmusainak valamely $\mathcal{G}$ kommutatív csoportja, az invariáns valószinűségi mértékek szerepét pedig $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ $\mathcal{G}$-invariáns valószinűségi nyomoperációi veszik át. Az első tétel analogonját általánosabban, tetszőleges $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ Neumann-algebrára és azon definiált $\mathcal{O}\!\mathcal{l}_1^+$[xxx]-en a gyenge topológiában folytonos lineáris formákra is bebizonyitjuk.

A dolgozat első pontjában a 2. pontban felhasználásra kerülő fogalmakat és tételeket ismertetjük, a 2. pont saját eredményeinket tartalmazza.

A dolgozatban az absztrakt mérték- és integrálelmélet, továbbá a funkcionálanalizis alapvető fogalomalkotásait és tételeit ismertnek tételezzük fel.

---

x) Az itt szereplő, a Neumann-algebrák elméletében használatos, fogalmak meghatározását lásd az 1. pontban!

xx) T Ω mérhető invertálható transzformációja, ha Ω-t kölcsönösen egyértelmű módon képezi le önmagára, és inverzével együtt mérhető.

xxx) Legyen m egy pozitiv valós szám, $\mathcal{H}$ Hilbert-tér, $\mathcal{M}$ pedig $\mathcal{H}$ korlátos operátorainak valamely halmaza. A továbbiakban $\mathcal{M}^+$ $\mathcal{M}$ pozitiv, $\mathcal{M}_m$ $\mathcal{M}$ m-nél nem nagyobb normáju elemeinek a halmazát, $\mathcal{M}_m^+$ pedig $\mathcal{M}^+ \cap \mathcal{M}_m$-et jelöli.

1. Alapvető fogalmak és tételek a Neumann-algebrák elméletéből x)

Az ebben a pontban ismertetett fogalmakat és tételeket a 2. pontban hivatkozás nélkül fogjuk felhasználni.

Jelöljön $\mathfrak{H}$ a továbbiakban lerögzített tetszőleges komplex Hilbert-teret, $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ pedig legyen $\mathfrak{H}$ összes (az egész térben értelmezett) korlátos lineáris operátorainak a halmaza.

$\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ tetszőleges $\mathfrak{M}$ részhalmaza esetén jelölje $\mathfrak{M}^{(1)} = \mathfrak{M}'$ $\mathfrak{M}$ kommutánsát, vagyis azoknak az operátoroknak a halmazát $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$-ból, amelyek felcserélhetők $\mathfrak{M}$ minden elemével. Legyen $\mathfrak{M}^{(n)} = (\mathfrak{M}^{(n-1)})'$ ($n = 2,3, \ldots\ldots$) és $\mathfrak{M}^{(2)} = \mathfrak{M}''$.

Először definiáljuk a Neumann-algebra fogalmát.

1. 1. Definició. $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$ elemeinek olyan, az egységoperátort tartalmazó $\mathfrak{A}$ részhalmazát, amely bármely két elemével együtt azok lineáris kapcsolatát, szorzatát, bármely elemének adjungáltját is tartalmazza, Neumann-algebrának nevezzük, ha teljesül rá a következő, egymással páronként ekvivalens, öt feltétel :

(1) $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}''$;

(2) (ill. (2')) $\mathfrak{A}$ (ill. $\mathfrak{A}_1$) a gyenge topológiában zárt ;

(3) (ill. (3')) $\mathfrak{A}$ (ill. $\mathfrak{A}_1$) az erős topológiában zárt.

Neumann-algebrára egyszerü példa $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$. Ha $\mathfrak{A}$ Neumann-algebra, akkor $\mathfrak{A}'$ és $\mathfrak{A}^{\natural} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$,ami nem más, mint $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{A}'$ közös centruma, is az. Általánosabban, akárhány Neumann-algebra metszete is Neumann-algebra.

Neumann-algebrákra érvényes a következő két állítás.

1. 1. Lemma. Egy $\mathfrak{A}$ Neumann-algebra minden eleme előáll $\mathfrak{A}^+$ elemeinek lineáris kombinációjaként.

1. 2. Lemma. Egy T $(\in \mathcal{B}(\mathfrak{H}))$ önadjungált operátor akkor és csakis akkor tartozik bele egy $\mathfrak{A}$ Neumann-algebrába, ha spektrálseregének minden eleme beletartozik $\mathfrak{A}$-ba.

Most rátérünk a pozitív lineáris forma fogalmának ismertetésére.

1. 2. Definició. Egy $\mathfrak{A}$ Neumann-algebrán definiált φ lineáris formát pozitívnak nevezzük $\mathfrak{A}$-n, ha teljesül a $\varphi(T) \geq 0$ egyenlőtlenség bármely $\mathfrak{A}^+$-beli T operátorra.

x) Az itt szereplő fogalmakra vonatkozóan lásd /2/-őt !

A normális pozitív lineáris forma definiciója a következő

I. 3. Definició . Egy $\mathcal{A}$ Neumann-algebrán értelmezett φ pozitív lineáris formát normálisnak nevezzük, ha $\mathcal{A}^{+}$ bármely, T legkisebb felső korláttal rendelkező, felfelé irányított $\mathcal{F}$ részhalmaza esetén teljesül a $\varphi(T) = \sup_{S \in \mathcal{F}} \varphi(S)$ egyenlőség.

Pozitív lineáris formákra fennáll a következő

I. 1 Tétel Egy $\mathcal{A}$ Neumann-algebrán értelmezett pozitív lineáris formára vonatkozóan a következő feltételek ekvivalensek :

(i) φ normális ;

(ii) φ $\mathcal{A}_1$ -en gyengén folytonos ;

(iii) φ $\mathcal{A}_1$ -en erősen folytonos.

Ki lehet mutatni, hogy egy $\mathcal{A}$ Neumann-algebrán értelmezett φ normális pozitív lineáris forma esetén $\mathcal{A}$ azon projekció között, amelyeken φ zérus értéket vesz fel, van maximális, és ezzel φ minden olyan zéróhelye, amely egyben projekció is, összehasonlítható. Jelöljük ezt az egyértelműen meghatározott maximális projekciót F_φ -vel.

I. 4. Definició . $E_\varphi = I - F_\varphi$ -t φ tartójának nevezzük.

Most bevezetjük a valószinűségi nyomoperáció fogalmát.

I. 5 Definició. Egy $\mathcal{A}$ Neumann-algebrán értelmezett φ normális pozitív lineáris formát valószinűségi nyomoperációnak nevezzük $\mathcal{A}$ -n, ha teljesülnek a következő feltételek. :

(i) $\varphi(I) = 1$

(ii) φ unitér invariáns, vagyis ha $U \in \mathcal{A}$ unitér, T pedig $\mathcal{A}$ tetszőleges eleme, akkor fennáll a $\varphi(UTU^{-1}) = \varphi(T)$ egyenlőség.

A továbbiakban fontos lesz számunkra a következő

I. 2. Tétel . Legyen $\mathcal{A}$ Neumann-algebra, T pedig $\mathcal{A}$ eleme. Ekkor az UTU^{-1} alakú operátorok egyenletesen zárt konvex burka, ahol $U \in \mathcal{A}$ tetszőleges unitér eleme, legalább egy $T^{\natural}$ elemében metszi $\mathcal{A}^{\natural}$ -t.

Ennek a tételnek a felhasználásával az I. I. Tételből következik, hogy minden $\mathcal{A}$ -n definiált valószinűségi nyomoperációra fennáll a $\varphi(T) = \varphi(T^{\natural})$ egyenlőség.

Ezután rátérünk a $*$-automorfizmus fogalmának meghatározására.

I. 7. Definició. Egy $\mathcal{A}$ Neumann-algebra önmagára való kölcsönösen egyértelmű θ leképezését $\mathcal{A}$ $*$-automorfizmusának nevezzük, ha

(i) θ $\mathfrak{A}$ lineáris leképezése.

(ii) Ha $T, S \in \mathfrak{A}$, akkor $\theta(ST) = \theta(S)\ \theta(T)$.

(iii) Ha $T \in \mathfrak{A}$ akkor $\theta(T^*) = \theta(T)^*$

A továbbiakban $*$-automorfizmus helyett csak automorfizmust mondunk.

Legyen $\mathfrak{A}$ Neumann-algebra és θ $\mathfrak{A}$ automorfizmusa. Könnyű belátni, hogy akkor θ^{-1} is automorfizmus, továbbá azt is, hogy θ $\mathfrak{A}$ pozitív operátorait pozitívokba, önadjungált operátort önadjungáltba, projekciót pedig projekcióba visz át.

Az automorfizmusok topológiai tulajdonságaira vonatkozik a következő

1. 3. Tétel. Legyen $\mathfrak{A}$ Neumann-algebra, θ pedig $\mathfrak{A}$ automorfizmusa. Ekkor θ folytonos $\mathfrak{A}_1$-en, $\mathfrak{A}_1$ gyenge topológiájában, s az erős topológiában is.

A 2. pontban invariáns valószínűségi nyomoperációkat fogunk vizsgálni. Egy $\mathfrak{A}$ Neumann-algebra és annak θ automorfizmusa esetében $\mathfrak{A}$-nak egy φ valószínűségi nyomoperációját invariánsnak nevezzük θ-val szemben, ha bármely $T\ (\in \mathfrak{A})$ esetében $\varphi(T) = \varphi(\theta(T))$.

2. Tételek invariáns valószínűségi nyomoperációkra

Legyen $\mathfrak{A}$ tetszőleges Neumann-algebra, $\mathcal{G}$ $\mathfrak{A}$ automorfizmusainak valamely kommutatív csoportja, és jelöljük $\mathcal{R}$-rel azoknak az $\mathfrak{A}$-n értelmezett, $\mathfrak{A}_1^+$-an gyengén folytonos lineáris formáknak a halmazát, amelyek invariánsak $\mathcal{G}$-vel (vagyis $\mathcal{G}$ minden elemével) szemben. Ekkor fennáll a következő

2. 1. Tétel. Bármely $\mathfrak{A}$-beli T operátorhoz található legalább egy olyan $\mathcal{G}$-invariáns $T^{\mathcal{G}}$ operátor $\mathfrak{A}$-ban, amelyre fennáll a $\varphi(T) = \varphi(T^{\mathcal{G}})$ egyenlőség $\mathcal{R}$ bármely φ elemére.

B i z o n y í t á s. Mivel $\mathfrak{A}$ minden eleme előáll $\mathfrak{A}_1^+$-beli elemek lineáris kombinációjaként, a tétel bizonyításánál szorítkozhatunk csupán $\mathfrak{A}_1^+$-beli T operátorokra.

Legyen θ a $\mathcal{G}$ csoport, T pedig $\mathfrak{A}_1^+$ tetszőleges eleme, és vegyük $\mathfrak{A}_1^+$-ből a $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \theta^i(T)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ operátorokat. Nyilván $\varphi(T_n) = \varphi(T)$ $(\varphi \in \mathcal{R};\ n = 1, 2, \ldots)$. Továbbá egyszerű számolás útján adódik, hogy

$$\theta(T_n) - T_n = \frac{1}{n}\left[\theta^n(T) - T\right], \text{ tehát}$$

$$(1)\qquad \| \theta(T_n) - T_n \| \leq \frac{2}{n}.$$

Ha a $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak csupán véges sok különböző tagja van, akkor létezik egy olyan $\{T_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ részsorozata, amely csupa azonos tagból áll. Ekkor /1/ szerint

$\| \theta(T_{n_i}) - T_{n_1} \| = \| \theta(T_{n_k}) - T_{n_k} \| \le \frac{2}{n_k}$ ebből viszont, ha $k \to \infty$, az következik, hogy $\| \theta(T_{n_1}) - T_{n_1} \| = 0$, vagyis $\theta(T_{n_1}) = T_{n_1}$. Nyilván fennáll a $\varphi(T) = \varphi(T_{n_1})$ ($\varphi \in \mathcal{R}$) egyenlőség is.

Ha a $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozatnak végtelen sok különböző tagja van, akkor -mivel $\mathcal{C}_1^+$ a gyenge topológiában kompakt - a sorozat tagjaiból alkotott halmaznak van $\mathcal{C}_1^+$ -be legalább egy torlódási pontja. Legyen T_θ egy ilyen torlódási pont, és legyen $\{A_\iota\}_{\iota \in I}$ az I, felfelé irányitott indexhalmazon definiált, a $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat T_θ -tól különböző tagjaiból alkotott, T_θ -hoz a gyenge topológiában konvergáló sorozat, jelekkel :

(2) $A_\iota \to T_\theta$, $A_\iota \ne T_\theta$ és $A_\iota = T_n$ (valamely n-re) ($\iota \in I$)

(2)-ből következik, hogy minden k természetes számhoz található olyan $\iota(k)$ index I-be, amelyre teljesül, hogy $A_\iota \ne T_k$, ha $\iota > \iota(k)$. Ellenkező esetben ugyanis, mint az kön[...] belátható, létezne olyan $\bar{\iota}$ ($\in I$) index, amelyre $A_{\bar{\iota}} = T_\theta$. Legyen most ε te[...]leges pozitív szám, $n(\varepsilon)$ pedig egy olyan természetes szám, amelyre $\frac{2}{n(\varepsilon)} < \varepsilon$. Vegyünk egy olyan $\iota(\varepsilon)$ ($\iota \in I$) indexet, amely nagyobb az $\iota(1), \dots, \iota(n[...])$ indexek mindegyikénél. Ha most $\iota > \iota(\varepsilon)$, akkor $A_\iota \ne T_k$, ha $k \le n(\varepsilon)$, így (1) szerint $\|\theta(A_\iota) - A_\iota\| < \varepsilon$. Tehát, mivel ε tetszőleges volt $\|\theta(A_\iota) - A_\iota\| \to$ így méginkább $\theta(A_\iota) - A_\iota \to 0$, ennek alapján viszont igaz a $\theta(A_\iota) \to T_\theta$ limeszre, amiből $\theta(T_\theta) = \theta(\lim_\iota A_\iota) = \lim_\iota \theta(A_\iota) = T_\theta$. $\mathcal{R}$ elemeinek $\mathcal{C}_1^+$ -en való gyeng[e] folytonosságából következik a $\varphi(T) = \varphi(T_\theta)$ ($\varphi \in \mathcal{R}$) egyenlőség.

Eddig azt bizonyitottuk be, hogy $\mathcal{G}$ tetszőleges θ és $\mathcal{C}_1^+$ bármely T eleméhez van olyan T_θ operátor $\mathcal{C}_1^+$-ből, amely θ -val szemben invariáns, és $\varphi(T) = \varphi(T_\theta)$, h[a] $\varphi \in \mathcal{R}$.

Legyen most θ' $\mathcal{G}$ -nek egy másik automorfizmusa.

Könnyen belátható, hogy a $T_{\theta, \theta'} = (T_\theta)_{\theta'}$ operátorok bármelyike, vagyis azo[k] amelyek az előbb megadott konstrukcókkal adódnak, mind θ -val, mind θ' -vel sz[emben] invariáns, továbbá nyilvánvaló, hogy $\varphi(T) = \varphi(T_{\theta, \theta'})$, ha $\varphi \in \mathcal{R}$. Ebből egyszerű meggondolások utján teljes indukcióval következik, hogy ha $\theta_1, \dots, \theta_n$ a $\mathcal{G}$ csopo[rt] véges sok automorfizmusa és $T \in \mathcal{C}_1^+$, akkor van olyan $T_{\theta_1, \dots, \theta_n}$ eleme $\mathcal{C}_1^+$ amely invariáns ezen véges sok automorfizmus bármelyikére, és $\varphi(T) = \varphi(T_{\theta_1, \dots, \theta_n})$ ha $\varphi \in \mathcal{R}$.

Az eddig elmondottakból tételünk már könnyen levezethető. Legyen ugyanis Θ a $\mathcal{G}$ csoport, T pedig $\mathfrak{A}_1^+$ tetszőleges eleme, és tekintsük rögzített T mellett azoknak az $A_\Theta(T)$ operátoroknak a halmazait, amelyek benne vannak $\mathfrak{A}_1^+$-ben, invariánsak Θ-val szemben, és igaz rájuk a $\varphi(T) = \varphi(A_\Theta(T))$ egyenlőség, ha $\varphi \in \mathcal{R}$. Ezek a halmazok minden Θ-ra $\mathfrak{A}_1^+$-ben gyengén zártak, és a fentebb mondottak szerint centrális rendszert alkotnak, tehát az összes ilyen halmaznak van legalább egy közös $T^{\mathcal{G}}$ pontja. Ez azt jelenti, hogy van $\mathfrak{A}_1^+$-ben legalább egy olyan $T^{\mathcal{G}}$ operátor, amely invariáns $\mathcal{G}$-vel szemben és $\varphi(T) = \varphi(T^{\mathcal{G}})$, ha $\varphi \in \mathcal{R}$. Ezzel tételünket bebizonyitottuk.

A 2. 1. tételből következik az alábbi

2.2 Tétel. Ha φ_1 és φ_2 $\mathcal{R}$ elemei, és $\varphi_1 = \varphi_2$ $\mathfrak{A}$ $\mathcal{G}$-invariáns projekcióin, akkor $\varphi_1 = \varphi_2$.

Bizonyitás. Könnyen belátható, hogy $\mathfrak{A}$ bármely T önadjungált operátora esetén $E_\lambda^{(\Theta(T))} = \Theta(E_\lambda^{(T)})$ ($\Theta \in \mathcal{G}$) ($E_\lambda^{(S)}$-sel jelöljük S spektrálseregének a λ számhoz tartozó elemét, ha $S \in \mathfrak{A}$), tehát $\mathfrak{A}$ minden, csoporttal szemben invariáns operátora spektrálseregének bármely eleme invariáns $\mathcal{G}$-vel szemben.

Legyen mármost φ_1 és φ_2 $\mathcal{R}$ elemei, és legyen $\varphi_1 = \varphi_2$ $\mathfrak{A}$ $\mathcal{G}$-invariáns projekcióin. Vegyünk egy T operátort $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}^+$-ből, a $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat tagjai pedig legyenek T spektrálserege elemeiből alkotott lineáris kombinációk, és álljon fenn a $\|T_n - T\| \to 0$ limeszreláció. Nyilván $T_n \in \mathfrak{A}_1^+$ valamilyen n_0-tól kezdve. Mivel φ_1 és φ_2 $\mathfrak{A}_1^+$-en az egyenletes topológiában is folytonos, továbbá minden T_n invariáns projekciók lineáris kombinációja, fennáll a $\varphi_1(T) = \varphi_2(T)$ egyenlőség. Ez az egyenlőség azonban fennáll $\mathfrak{A}$ bármely $\mathcal{G}$-invariáns T elemére is, mert $\mathfrak{A}$ $\mathcal{G}$-invariáns elemei Neumann-algebrát alkotnak, tehát $\mathfrak{A}$ minden $\mathcal{G}$-invariáns eleme $\mathfrak{A}_{\frac{1}{2}}^+$-beli $\mathcal{G}$-invariáns operátorok lineáris kombinációja. Tételünket a 2. 1. Tételből most már könnyen levezethetjük.

Legyen most $\mathcal{G}$ $\mathfrak{A}$ automorfizmusainak tetszőleges (nem szükségképpeni kommutatív) csoportja, $\mathcal{P}$ $\mathfrak{A}$ $\mathcal{G}$-invariáns valószinüségi nyomoperációinak, $\mathcal{P}_1$ pedig $\mathcal{P}$ ergodikus elemeinek a halmaza. – φ-t ($\varphi \in \mathcal{P}$) ergodikusnak nevezzük /4/ szerint, ha a $\varphi(P) = 0$ és a $\varphi(P) = 1$ egyenlőségek közül az egyik teljesül minden $\mathfrak{A}^{\#}$-beli $\mathcal{G}$-invariáns P projekcióra. – A 2. 3. tétel általánositása nyomoperációk esetében a következő

2. 3. Tétel. Ha φ_1 és φ_2 $\mathcal{P}$-be tartoznak, és bármely $\mathfrak{A}^{\#}$-be eső $\mathcal{G}$-re nézve invariáns P projekció esetén $\varphi_1(P) = \varphi_2(P)$, akkor $\varphi_1 = \varphi_2$.

B i z o n y i t á s. Legyen $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, φ $\mathcal{A}_1^+$-en nyilván gyengén folytonos, s mivel $\mathcal{A}_1^+$ gyengén kompakt, ezért φ $\mathcal{A}_1^+$-en felveszi maximumát, tehát

$$\sup_{T \in \mathcal{A}_1^+} \varphi(T) = \varphi(A) \qquad (A \in \mathcal{A}_1^+)$$

A h -leképezés létezése miatt feltételezhetjük, hogy $A \in \mathcal{A}^h$. Pukánszky /6/ szerint A projekciónak is választható. A bizonyitás teljessége kedvéért emlékeztetünk Pukánszky gondolatmenetére. Evégből legyen $A = \int_0^1 \lambda \, dE_\lambda$ A spektrálelőállitása. Tudjuk, hogy φ az egyenletes topológiában is folytonos, ebből következik, hogy

$$\varphi(A) = \int_0^1 \lambda \, d\varphi(E_\lambda).$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$\varphi(AE_a) = \int_0^a \lambda \, d\varphi(E_\lambda) \qquad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

Vegyük észre, hogy $\varphi(AE_a)$ a monoton növekvő függvénye ! Ellenkező esetben ugyanis volna egy olyan $[\alpha, \beta]$ intervallum /0, 1/-ben, amelyre $\varphi(A(E_\beta - E_\alpha)) < 0$ igaz. Ez azonban ellentmond A maximalitásának, mert $\varphi(A(E_\beta - E_\alpha)) < \varphi(A) - \varphi(A)$, tehát $\varphi(A) < \varphi(\,/I - (E_\beta - E_\alpha)/A)$.

$\varphi(AE_a)$ növekedéséből következik, hogy $\varphi(E_\lambda)$ monoton nő /0, 1/-ben. Igy

$$\varphi(A) = \int_0^1 \lambda \, d\varphi(E_\lambda) \leq \varphi(I - E_0)$$

tehát

$$\varphi(A) = \varphi(I - E_0).$$

Tehát valóban, φ $\mathcal{A}_1^+$-en felvett maximumát felveszi egy $\mathcal{A}^h$-beli projekcióban is. Legyen most E és F két maximális projekció $\mathcal{A}^h$-ból. Ekkor $E \cup F = E + F - EF$ is maximális projekció, amit mutat a $\varphi(E \cup F) = \varphi(E) + \varphi(F) - \varphi(EF)$ egyenlőség. Ebből φ -nek $\mathcal{A}_1^+$-en való erős folytonossága miatt következik, hogy ha E ($\in \mathcal{A}^h$) maximális projekció, akkor az $\overline{E} = \bigcup_{i_1, \dots, i_n} \theta_{k_1}^{i_1} \dots \theta_{k_n}^{i_n}(E)$ projekció is maximális, mivel a $\theta_{k_1}^{i_1} \dots \theta_{k_n}^{i_n}(E)$ projekciókból alkotott véges uniók sorozata erősen torlódik $\overline{E}$ -hoz.

Mivel $\mathcal{A}^h$-beli maximális projekció létezik, a fentebbi meggondolások szerint $\mathcal{A}^h$-beli $\mathcal{G}$-invariáns maximális projekció is létezik. (Könnyen kimutatható ugyanis, hogy $\overline{E}$ $\mathcal{G}$-invariáns.) Ennek alapján fennáll a $\max_{T \in \mathcal{A}_1^+} \varphi(T) = 0$ egyenlőség. Összes eddigi meggondolásunkat $\varphi_1 - \varphi_2$ helyett $\varphi_2 - \varphi_1$ -gyel végezve el, azt kapjuk, hogy $\min_{T \in \mathcal{A}_1^+} \varphi(T) = 0$. Ez az előbbi egyenlőséggel együtt azt jelenti, hogy $\varphi(T) = 0$, ha $T \in \mathcal{A}_1^+$. Mivel $\mathcal{A}$ minden eleme előáll $\mathcal{A}_1^+$ elemeinek lineáris kombinációjaként $\varphi \equiv 0$, vagyis $\varphi_1 = \varphi_2$.

A 2. 3. Tételhez csatlakozva kimutatjuk a következő kiegészitéseket :

1. Korollárium. Ha $\varphi \in \mathcal{P}_1$, $\psi \in \mathcal{P}$ és ψ abszolut folytonos [x] φ -re nézve, akkor $\varphi \equiv \psi$.

B i z o n y i t á s. Legyen ugyanis P egy $\mathcal{G}$ - invariáns projekció $\mathcal{C}^h$-ből. Ekkor vagy $\varphi(P) = 0$ vagy $\varphi(I - P) = 0$. Ha $\varphi(P) = 0$, akkor $\psi(P) = 0$, ha $\varphi(I - P) = 0$, akkor $\psi(I - P) = 0$, tehát mindkét esetben $\varphi(P) = \psi(P)$. Mivel P tetszőleges volt, $\varphi \equiv \psi$.

2. Korollárium. Ha φ és ψ $\mathcal{P}_1$-be tartoznak, akkor vagy merőlegesek [xx], vagy azonosak.

B i z o n y i t á s. Tegyük fel, hogy $\varphi \neq \psi$. Ekkor van $\mathcal{C}^h$ -ban egy olyan $\mathcal{G}$ -invariáns P projekció, amelyre $\varphi(P) = 0$ és $\psi(P) = 1$ igaz. Rögtön látható, hogy $I - E_\varphi \geq P$, tehát $\psi(I - E_\varphi) = 1$, amiből következik, hogy $I - E_\varphi \geq E_\psi$, tehát $E_\varphi E_\psi = 0$

3. Korollárium. $\mathcal{P}$ konvex halmaz, és $\mathcal{P}$ extremális pontjainak összesége $\mathcal{P}_1$.

B i z o n y i t á s. Az első állitás triviális. A második állitás bizonyitása végett legyen $\varphi \in \mathcal{P}_1$ és legyen $\varphi = t\,\psi_1 + (1 - t)\,\psi_2$ $(0 < t < 1, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{P})$. Ekkor ψ_1 és ψ_2 abszolut folytonos φ -re nézve, igy az 1. Korollárium szerint $\varphi \equiv \psi_1 \equiv \psi_2$, tehát φ extremális pontja $\mathcal{P}$ -nek. Forditva, legyen $\varphi \in \mathcal{P}$ és $\varphi \notin \mathcal{P}_1$. Ekkor van $\mathcal{C}^h$-ben egy olyan $\mathcal{G}$ -invariáns P projekció, amelyre fennáll a

$0 < \varphi(P) < 1$

egyenlőtlenség. Vegyük most $\mathcal{P}$ -ből azt a két ψ_1, ψ_2 funkcionált, amelyek a következőképpen vannak definiálva :

$$\psi_1(T) = \varphi(TP)/\varphi(P) \text{ és } \psi_2(T) = \varphi(T(I - P))/\varphi(I - P) \quad (T \in \mathcal{C}).$$

Ekkor $\psi_1 \not\equiv \psi_2$ és $\varphi = \varphi(P)\,\psi_1 + \varphi(I - P)\,\psi_2$, tehát φ nem extremális pontja $\mathcal{P}$ -nek. Ezzel a lemmát bebizonyitottuk.

A továbbiakban fel fogjuk tételezni, hogy $\mathcal{G}$ kommutativ. Ekkor fennáll a következő

2. 1. Lemma. Bármely $T \in \mathcal{C}_1^+$ operátorhoz és $0 \leq \alpha \leq 1$ valós számhoz található $\mathcal{C}^h$ -ben olyan $\mathcal{G}$ -invariáns P projekció, amelyre $\varphi(P) = 1$ ekvivalens azzal, hogy $\varphi(T) \leq \alpha$, tetszőleges $\varphi \in \mathcal{P}_1$ -re.

---

x) φ_1 -et akkor nevezzük abszolut folytonosnak φ_2 -re nézve $(\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P})$ ha bármely $\mathcal{C}$ -beli projekció esetén $\varphi_2(P) = 0$-ból következik, hogy $\varphi_1(P) = 0$.

xx) φ_1 és φ_2 $(\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P})$ definició szerint akkor merőlegesek egymásra, ha $E_{\varphi_1} E_{\varphi_2}$

B i z o n y i t á s. Legyen $T \in \mathcal{A}^{+}_{1}$, α a $0 \leq \alpha \leq 1$ feltételt kielégitő valós szám, és vegyünk egy rogzitett T^{q} -et. Ekkor nyilván $\varphi(T) = \varphi(T^{q})$, ha $\varphi \in \mathcal{P}_1$, és nyilván $T^{q} \in (\mathcal{A}^{q})^{+}_{1}$. Vegyünk most $(\mathcal{A}^{q})^{+}_{1}$-ből egy olyan, a továbbiakban lerögzitett $\overline{T}$ operátort, amelyik invariáns $\mathcal{G}$-vel szemben, és $\varphi(T^{q}) = \varphi(\overline{T})$ bármely $\mathcal{P}_1$-beli φ esetén. Ilyen $\overline{T}$ operátor a 2. 1. Tétel /bizonyitása / szerint létezik, továbbá $\overline{T}$ $\mathcal{G}$-invarianciája miatt, a 2. 2. Tétel bizonyitásában mondottak szerint $\overline{T}$ spektrálseregének minden eleme $\mathcal{G}$-invariáns. Ki fogjuk mutatni, hogy $\overline{T}$ spektrálseregének E_{α} eleme megfelel a lemmában szereplő P projekciótól megkivánt feltételeknek.

Legyen ugyanis $\varphi \in \mathcal{P}_1$ és legyen μ_{φ} az a legkisebb valós szám amelyhez tartozó E_{μ_φ} projekcióra ($\overline{T}$ spektrálseregében) φ-t alkalmazva, 1-et kapunk. Ha $\varphi(T) \leq \alpha$, akkor $\varphi(\overline{T}) \leq \alpha$ is igaz, tehát $\varphi(\overline{T}) = \int_0^1 \lambda \, d\varphi(E_\lambda) = \mu_\varphi \leq \alpha$, vagyis $\varphi(E_\alpha) = 1$. Ha viszont $\varphi(E_\alpha) = 1$, akkor $\varphi(T) = \varphi(\overline{T}) = \mu_\varphi \leq \alpha$, amivel a lemmát bebizonyitottuk.

A továbbiakban a $\mathcal{P}$-beli nyomoperációk ergodikus nyomoperációk szerinti direkt integrál felbontását fogjuk elvégezni. Hogy ezt egyáltalán megtehessük, fel kell téteteleznünk, hogy $\mathcal{P}_1$ nem üres, továbbá azt is, hogy ha valamely $\mathcal{G}$-invariáns $\mathcal{A}^{q}$-beli P projekción minden $\mathcal{G}$-ergodikus nyomoperáció eltűnik, akkor $\varphi(P) = 0$ fennáll bármely $\mathcal{P}$-beli φ-re is. Valóban, tegyük meg ezeket a feltevéseket, és természetesen továbbra is tételezzük fel, hogy $\mathcal{G}$ kommutatív.

Legyen P tetszőleges $\mathcal{G}$-invariáns projekció $\mathcal{A}^{q}$-ből. Definiáljuk Π_P-t a következő módon: $\Pi_P = \{\varphi \in \mathcal{P}_1 : \varphi(P) = 1\}$. Legyen Π az összes ilyen Π_P rendszere. A következő állitások evidensek:

(i) $\Pi_I = \mathcal{P}_1$

(ii) $[\Pi_P]^c = \Pi_{I-P}$

(iii) $\Pi_{\bigcup_{\iota \in I} P_\iota} \neq \bigcup_{\iota \in I} \Pi_{P_\iota}$ (I tetszőleges indexhalmaz)

Ezek alapján adódik, hogy Π σ-algebra $\mathcal{P}_1$ felett. Legyen $\varphi \in \mathcal{P}$ és definiáljuk a μ_φ függvényt Π-n a következő módon: $\mu_\varphi(\Pi_P) = \varphi(P)$.

Bebizonyitjuk, hogy μ_φ valószinűségi mérték Π-n.

Először megmutatjuk, hogy μ_φ egyértékű függvény.

Ehhez igazoljuk, hogy a következő két állitás ekvivalens.

(1) $\Pi_P \wedge \Pi_Q = \emptyset$;

(2) $\varphi(PQ) = 0$ minden $\varphi \in \mathcal{P}_1$-re .

Ha ugyanis $\Pi_P \cap \Pi_Q = \phi$ akkor tetszőleges $\varphi \in \mathcal{P}_1$ esetén vagy $\varphi(P) = 0$ vagy $\varphi(Q) = 0$ tehát $\varphi(PQ) = 0$. Fordítva, ha $\Pi_P \cap \Pi_Q \neq \phi$ akkor, van egy olyan $\varphi \in \mathcal{P}_1$, amelyre $\varphi(P) = \varphi(Q) = 1$, de ekkor $P, Q \geq E_\varphi$, így $PQ \geq E_\varphi$, amiből $\varphi(PQ) = 1$, tehát nem igaz /2/.

Az eddigiek alapján már könnyen belátható, hogy egyértékű függvény. Legyen ugyanis $\Pi_P = \Pi_Q$, ekkor $\Pi_P \cap [\Pi_Q]^C = \Pi_P \cap \Pi_{I-Q} = \phi$ és $[\Pi_P]^C \cap \Pi_Q = \Pi_{I-P} \cap \Pi_Q = \phi$, tehát ha $\psi \in \mathcal{P}$, akkor $\psi(P(I-Q)) = \psi((I-P)Q) = 0$, amiből $\psi(P) = \psi(Q)$, vagyis $\mu_\psi(\Pi_P) = \mu_\psi(\Pi_Q)$.

Legyen most $\{\Pi_{P_n}\}_{n=1}^{\infty}$ Π, páronként idegen elemeinek sorozata. Ekkor a fentebb bizonyítottak szerint

$$\mu_\psi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_{P_n}\right) = \mu_\psi\left(\Pi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n}\right) = \psi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n\right) =$$

$$= \psi\left(\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{i<j;\, i,j=1}^{n} P_i P_j + \dots + (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n} P_i\right]\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \psi\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(P_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\psi(\Pi_{P_n}) .$$

Ez azt jelenti, hogy μ_ψ megszámlálhatóan additív.

Nyilvánvalóan $\mu_\psi \geq 0$ és $\mu_\psi(\mathcal{P}_1) = 1$.

Igaz tehát a következő

2. 2. Lemma. μ_ψ tetszőleges $\psi \in \mathcal{P}$ -re valószínűségi mérték Π -n.

A továbbiakban szükségünk lesz a μ_ψ szerinti integrálok esetében a klasszikus Lebesgue-tétel bizonyos értelemben vett általánosítására. Ezért nevezzük a következő fogalmakat :

2. 1. Definició. Egy Ω halmazon értelmezett $\mathcal{A}$ σ-algebrát normális algebrának nevezünk Ω -n, ha $\mathcal{A}$ akárhány elemével együtt azok egyesitési halmazát is tartalmazza.

2.2. Definició. Legyen $\mathcal{A}$ normális algebra Ω felett, μ pedig $\mathcal{A}$ -n definiált valószínűségi mérték. μ -t normáltnak nevezzük, ha $\mathcal{A}$ bármely felfelé irányitott $\mathcal{F}$ részhalmaza esetén teljesül a $\sup_{E \in \mathcal{F}} \mu(E) = \mu(\sup_{E \in \mathcal{F}} E)$ egyenlőség, ahol $\sup_{E \in \mathcal{F}} E$ -vel $\mathcal{F}$ összes elemének egyesitési halmazát jelöltük.

A 2. 1. ill. a 2.2. Definicióval ekvivalens meghatározást kapunk, ha bennük «egyesitési halmaz» helyett «metszet»-et ill. «felfelé irányitott» helyett «lefelé irányitott»-at irunk.

A normális mértékek esetében érvényes a Lebesgue-tétel következő általánosítása :

2. 3. Lemma. Legyen Ω tetszőleges halmaz, $\mathcal{A}$ normális algebra Ω felett, μ pedig normális valószinüségi mérték $\mathcal{A}$ -n. Legyen $\{f_\iota\}_{\iota\in I}$ μ -re nézve integrálható függvényeknek az I felfelé irányitott halmazon definiált olyan sorozata, amelyre $|f_\iota| \leq g$ $(\iota \in I)$ fennáll μ-majdnem mindenütt valamely μ -re nézve integrálható g függvényre. Ha f_ι konvergál egy μ -mérhető f függvényhez μ-m. m., akkor f is integrálható, és

$$\int_\Omega f d\mu = \lim_\iota \int_\Omega f_\iota d\mu$$

B i z o n y i t á s. Konvergáljon az f_ι integrálható függvényekből alkotott, az I felfelé irányitott halmazon definiált $\{f_\iota\}_{\iota\in I}$ sorozat egy f mérhető függvényhez m. m., és legyen g olyan integrálható függvény, amelyre $|f_\iota| \leq g$ teljesül m. m. minden $\iota \in I$-re. Először bebizonyitjuk, hogy f integrálható. Az $|f_\iota| \leq g$ egyenlőtlenség ugyanis a mérték normalitása miatt egy ι -tól független 0 -mértékü halmazon kivül fennáll minden $\iota \in I$ -re. Ebből következik, hogy $|f| \leq g$ m. m. s mivel f mérhető, ebből rögtön adódik f integrálhatósága.

Legyen ε' tetszőleges pozitiv szám, és képezzük minden $\iota \in I$ indexre az

$$E_\iota = \bigcup_{\kappa > \iota} \{x : |f_\kappa(x) - f(x)| \geq \varepsilon'\}$$

halmazt. Nyilván minden E_ι mérhető, ebből következik, hogy $\bigcap_{\iota\in I} E_\iota$ is mérhető. A m.m. konvergencia és μ normalitása miatt pedig $\mu(\bigcap_{\iota\in I} E_\iota) = 0$. Nyilván

$$0 \leq \mu(\{x : |f_\iota(x) - f(x)| \geq \varepsilon'\}) \leq \mu(E_\iota) \quad (\iota \in I).$$

Ha itt ι -ra limeszt képzünk, akkor μ normalitásának felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\lim_\iota \mu(\{x : |f_\iota(x) - f(x)| \geq \varepsilon'\}) = 0,$$

tehát az $\{f_\iota\}_{\iota\in I}$ sorozat – általánosabb értelemben – mértékben tart f-hez.

Legyen E $\mathcal{A}$ eleme, ekkor

$$\int_E |f_\iota| d\mu \leq \int_E g d\mu$$

Ebből leolvasható, hogy az f_ι függvények határozatlan integráljai egyenlő mértékben abszolut folytonosak a mértékre nézve, ami azt jelenti, hogy minden pozitiv $\bar{\varepsilon}$ -hoz megadható olyan pozitiv δ szám ugy, hogy ha $\mu(E) < \delta$, akkor

$$\int_E |f_\iota| d\mu < \bar{\varepsilon} \quad (\iota \in I).$$

Legyen ε tetszőleges pozitiv szám. Alkossuk meg minden ι, κ indexpárra az

$$E_{\iota,\kappa} = \{x : |f_\iota(x) - f_\kappa(x)| \geq \varepsilon/3\}$$

mérhető halmazokat. Legyen δ olyan pozitiv szám, amelyre igaz, hogy ha $E \in \mathcal{A}$ és

$\mu(E) < \delta$, akkor $\int_E |f_\iota| \, d\mu < \varepsilon/3$ ($\iota \in I$).

Mivel az $\{f_\iota\}_{\iota \in I}$ sorozat mértékben konvergens, mértékben fundamentális is, tehát van olyan $\bar{\iota}$ index I-ben, amelyre teljesül, hogy ha $\iota, \kappa > \bar{\iota}$, akkor $\mu(E_{\iota\kappa}) < \delta$. Ha mármost $\iota, \kappa > \bar{\iota}$, akkor

$$\int_\Omega |f_\iota - f_\kappa| \, d\mu \leq \int_{E_{\iota\kappa}} |f_\iota| \, d\mu + \int_{E_{\iota\kappa}} |f_\kappa| \, d\mu +$$

$$+ \int_{E^c_{\iota\kappa}} |f_\iota - f_\kappa| \, d\mu \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \int_\Omega \varepsilon/3 \, d\mu = \varepsilon$$

ε tetszőleges volta miatt ebből következik, hogy az $\{f_\iota\}_{\iota \in I}$ sorozat integrálközépen fundamentális. Mivel az $L^1(\mu)$ metrikus tér teljes, létezik egy olyan $\bar{f}$ integrálható függvény, amelyhez $\{f_\iota\}_{\iota \in I}$ integrálközépben konvergál :

$$\int_\Omega |\bar{f} - f_\iota| \, d\mu \to 0.$$

Az $\{f_\iota\}_{\iota \in I}$ sorozat még inkább tart mértékben $\bar{f}$ -hoz, de mivel $f_\iota \to f$ (mértékben) is fennáll, $f = \bar{f}$ m. m. Tehát $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega \bar{f} \, d\mu$, amiből következik, hogy $\int_\Omega f_\iota \, d\mu \to \int_\Omega f \, d\mu$ mivel $\int_\Omega f_\iota \, d\mu \to \int_\Omega \bar{f} \, d\mu$. Ezzel a lemmát bebizonyitottuk.

A következő lemma az általánosabb értelemben vett Lebesgue-tétel teljesülését biztositja μ_φ ($\varphi \in \mathcal{P}$) szerinti integrálokra.

2. 1. Lemma. Minden μ_φ ($\varphi \in \mathcal{P}$) valószinüségi mérték normális.

Bizonyitás. Π normális halmazalgebra, ezt mutatja (iii).

Legyen $\mathcal{F} = \{\Pi_P\}_{P \in \mathcal{F}}$ μ_φ-mérhető halmazoknak valamely felfelé irányitott sorozata. A normalitás bizonyitása végett feltehetjük, hogy $\mathcal{F}$ bármely két elemével együtt azok egyesitési halmazát is tartalmazza. Ekkor (iii) szerint $\bar{\mathcal{F}}$ is választható felfelé irányitottnak. Vegyük $\bar{\mathcal{F}}$ -t felfelé irányitottnak, akkor

$$\mu_\varphi(\sup_{E \in \mathcal{F}} E) = \mu_\varphi(\bigcup_{P \in \bar{\mathcal{F}}} \Pi_P) = \mu_\varphi(\Pi \bigcup_{P \in \bar{\mathcal{F}}} P) = \varphi(\bigcup_{P \in \bar{\mathcal{F}}} P) =$$

$$= \sup_{P \in \bar{\mathcal{F}}} \varphi(P) = \sup_{P \in \bar{\mathcal{F}}} \mu_\varphi(\Pi_P) = \sup_{\Pi_P \in \mathcal{F}} \mu_\varphi(\Pi_P),$$

vagyis μ_φ normális.

Most már könnyen bebizonyithatjuk a direkt integrálfelbontásra vonatkozó tételünket.

Legyen $T \in \mathcal{O}^+_1$ és tekintsük a $\mathcal{P}_1$ -en következőképpen definiált f_T függvényt : $f_T(\varphi) = \varphi(T)$. Nyilván $0 \leq f_T(\varphi) \leq 1$. Az $f_T(\varphi)$ függvény mérhető bármely μ_φ-re ($\varphi \in \mathcal{P}$) nézve, mivel ha $0 \leq \alpha \leq 1$, akkor a 2. 1. Lemma szerint

$$\{\varphi \in \mathcal{P}_1 : \varphi(T) \leq \alpha\} = \{\varphi \in \mathcal{P}_1 : \varphi(P) = 1\} = \Pi_P$$

ahol P $\mathcal{O}^h$ valamely $\mathcal{G}$ -invariáns projekciója. Ebből és a $0 \leq f_T(\varphi)$ relációból következik, hogy a

$$\bar{\varphi}(T) = \int_{\mathcal{P}_1} \varphi(T)\, d\mu_\varphi$$

integrál létezik bármely $T \in \mathcal{A}^+_1$ és $\varphi \in \mathcal{P}_1$ esetén. Mivel $\mathcal{A}$ minden eleme előáll $\mathcal{A}^+_1$ elemeinek lineáris kombinációjaként, a fenti integrál bármely $T \in \mathcal{A}$ esetén is létezik, így az $\mathcal{A}$-n egy funkcionált definiál. Ez a funkcionál pozitív, lineáris, unitér invariáns és invariáns $\mathcal{G}$-re. Ez következik a $\varphi \in \mathcal{P}_1$ funkcionálok hasonló tulajdonságaiból, valamint az integrál pozitivitásából és linearitásából. Tekintsük most $\mathcal{A}^+$ elemeinek valamely $\{S_\iota\}_{\iota \in \Gamma}$, S legkisebb felső korláttal rendelkező, felfelé irányított halmazát. Ekkor μ_φ és $\varphi \in \mathcal{P}_1$ normalitása miatt a 2.3. Lemma alapján fennállnak a

$$\bar{\varphi}(S) = \int_{\mathcal{P}_1} \varphi(S)\, d\mu_\varphi = \int_{\mathcal{P}_1} \sup \varphi(S_\iota)\, d\mu_\varphi =$$

$$= \sup_{\iota \in \Gamma} \int_{\mathcal{P}_1} \varphi(S_\iota)\, d\mu_\varphi = \sup_{\iota \in \Gamma} \bar{\varphi}(S_\iota)$$

egyenlőségek, ami azt jelenti, hogy $\bar{\varphi}$ normális. Továbbá $\bar{\varphi}(I) = \int_{\mathcal{P}_1} \varphi(I)\, d\mu_\varphi =$ $= \int_{\mathcal{P}_1} d\mu_\varphi = 1$. Tehát, összegezve az eddigieket, $\bar{\varphi} \in \mathcal{P}_1$.

Legyen most $P \in \mathcal{A}^{\mathcal{G}}$ valamely $\mathcal{G}$-invariáns projekció, ekkor

$$\bar{\varphi}(P) = \int_{\mathcal{P}_1} \varphi(P)\, d\mu_\varphi = \mu_\varphi(\Pi_P) = \varphi(P),$$

tehát $\bar{\varphi}$ értéke $\mathcal{A}^{\mathcal{G}}$ $\mathcal{G}$-invariáns projekcióiban megegyezik φ értékével. Így igaz a 2.3. tétel alapján a következő

2. 4. Tétel. Ha $\varphi \in \mathcal{P}$ és $T \in \mathcal{A}$, akkor

$$\varphi(T) = \int_{\mathcal{P}_1} \varphi(T)\, d\mu_\varphi .$$

2. 1. Megjegyzés. Az általunk megadott μ_φ mérték a legszűkebb mindazon $\mathcal{P}_1$ felett értelmezett mértékek között, amelyek szerint lehetséges az integrálfelbontás. Legyen ugyanis $\varphi \in \mathcal{P}$, továbbá legyen $P (\in \mathcal{A}^{\mathcal{G}})$ $\mathcal{G}$-invariáns projekció, μ'_φ pedig egy olyan mérték $\mathcal{P}_1$ felett, amely szerint lehetséges φ integrálfelbontása. Ekkor $\mu'_\varphi(\Pi_P) = \varphi(P) = \int_{\mathcal{P}_1} \varphi(P)\, d\mu'_\varphi = \mu_\varphi(\Pi_P)$, és éppen ezt akartuk bebizonyítani.

IRODALOM

/1/ J. R. Blum and D. L. Hanson, On invariant probability measures I., Pacific Journal of Math., 10 /1960/, 1125-1130.

/2/ J. Dixmier : Les algèbres d'opérateurs dans l' espace hilbertien (Algèbres de von Neumann) (Paris, 1957/

/3/ P. R. Halmos, Measure theory (New York, 1950/

/4/ Kovács I., Vizsgálatok a nemkommutatív integrálás elméletéből /Kandidátusi értekezés, Szeged, 1960/

/5/ M. A. Наймарк, Нормированные кольца (Москва, 1956)

/6/ L. Pukánszky, The theorem of Radon-Nikodym in operator-rings, Acta Sci. Math., 15 /1954/, 149 - 157./

/7/ B. Sz. Nagy, Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, in Ergebnisse der Math., 1942.